MA-3111: PRIMER PARCIAL Bloque A

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Sartenejas Septiembre-Diciembre 2018

Nombre:____. Carnet:____________________.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE: $u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(z) \quad (a, \omega \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

Propiedades básicas

$u'_{\text{gen}}(x)$	$\to$	$zU(z)$
$xu(x)$	$\to$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$\to$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x}u(x)$	$\to$	$U(z-\alpha)$
$\alpha u(x)+\beta v(x)$	$\to$	$\alpha U(z)+\beta V(z)$
$(u*v)(x)$	$\to$	$U(z)V(z)$

Algunas transformadas

$\delta(x)$	$\to$	1
$\delta^{(k)}(x)$	$\to$	z^k
$H(x)$	$\to$	$\frac{1}{z}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\to$	$\frac{1}{z^k}$
$H(x)e^{\alpha x}$	$\to$	$\frac{1}{z-\alpha}$

Transformadas complementarias

$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\to$	$\frac{1}{(z-\alpha)^k}$
$H(x)\text{sen}(\omega x)$	$\to$	$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$
$H(x)\cos(\omega x)$	$\to$	$\frac{z}{z^2+\omega^2}$
$H(x)\text{senh}(\omega x)$	$\to$	$\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$
$H(x)\cosh(\omega x)$	$\to$	$\frac{z}{z^2-\omega^2}$

---

1. (12 pts.) Responda:

   a) [4 pts.] Halle la transformada de Laplace (y su región de convergencia) de la función $f(x) = xH(-x)$ utilizando la definición.

   b) [4 pts.] Halle la relación entre la transformada de Laplace para la función causal $f_1(x) = y(x)H(x)$ y la transformada de Laplace para la función anticausal $f_2(x) = y(x)H(-x)$ cuando $y(x) = e^{3x}$. Recuerde colocar la región de convergencia.

   c) [4 pts.] Si $y(t)H(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$, obtenga el valor de la transformada de Laplace de $y'(t)H(-t)$.

2. (13 pts.) Determine una solución para el siguiente problema de valores iniciales que sea causal a la derecha del cero.

$$\begin{cases} xy''(x) + (1+2x)y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

3. (12 pts.) Considere la ecuación $y(x) - x\delta''(x) + xy'(x) = 0$.

   a) [6 pts.] Halle los valores de las constantes A y B que hacen que la función generalizada

$$y_o(x) = A\delta(x) + B\delta'(x)$$

   sea solución de la ecuación anterior.

   b) [6 pts.] ¿Tendrá la ecuación alguna solución clásica?

4. (13 pts.) Resuelva la siguiente ecuación sujeta a la condición de $y(0) = 1$.

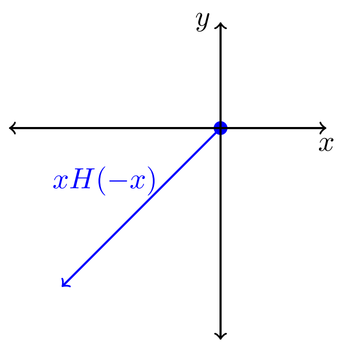
$$xy'(x) + 2\int_0^x y(t)\text{sen}(x-t)dt = 0, \quad x > 0$$

SOLUCIÓN

1. Respondemos el inciso a): Aplicamos la definición de la transformada de Laplace para $f(x) = xH(-x)$:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(xH(-x)) = \int_{-\infty}^{\infty} tH(-t)e^{-zt}dt = \int_{-\infty}^{0} te^{-zt}dt$$

Fíjese en la siguiente gráfica:



Aplicamos integración por partes:

$$\begin{array}{r|l} u = t & dv = e^{-zt}dt \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{z}e^{-zt} \end{array}$$

Continuamos integrando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x)) &= \int_{-\infty}^{0} te^{-zt}dt = -\left[\frac{t}{z}e^{-zt}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} -\left(\frac{1}{z}\right)e^{-zt}dt \\ &= \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{t}{z}e^{-zt} - \frac{1}{z^2}e^{-zt}\right]_{-p}^{0} \\ \mathcal{L}(f(x)) &= \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{z^2} - \left(\frac{pe^{pz}}{z} - \frac{e^{pz}}{z^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Estudiamos para el valor de z:

- Si $\texttt{Re}(z) > 0 \implies \mathcal{L}(f(x)) = -\frac{1}{z^2} - \infty + \infty \implies$ Diverge.
- Si $\texttt{Re}(z) < 0 \implies \mathcal{L}(f(x)) = -\frac{1}{z^2} - 0 + 0$ (Regla de Crecimiento).

De esta manera, concluimos que:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} tH(-t)e^{-zt}dt = -\frac{1}{z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} : \texttt{Re}(z) < 0 \blacksquare$$

Otra manera más rápida es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x)) &= \int_{-\infty}^{0} te^{-zt}dt = \int_{-\infty}^{0} -\frac{d}{dz}(e^{-zt})dt = -\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{0} e^{-zt}dt \\ \mathcal{L}(f(x)) &= -\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-zt}}{(-z)}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Lo importante sería denotar que $\mathtt{Re}(z) < 0$ ■.

Respondemos inciso **b):** Calculamos la transformada de Laplace para $\{f_i(x) | i = 1, 2\}$.

$$\mathcal{L}(f_1(x)) = \mathcal{L}(e^{3x}H(-x)) = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-zx}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x(z-3)} = -\frac{1}{z-3}, \quad \mathtt{Re}(z) < 3$$
$$\mathcal{L}(f_2(x)) = \mathcal{L}(e^{3x}H(x)) = \frac{1}{z-3}, \quad \mathtt{Re}(z) > 3$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(f_1(x)) = -\mathcal{L}(f_2(x))$. Sin embargo, como no tienen la misma región de convergencia, concluimos entonces que no hay relación. La proposición es falsa ■.

Respondemos inciso **c):** Calculamos la transformada de Laplace para $y'(t)H(-t)$.

$$\mathcal{L}(y'(t)H(-t)) = \int_{-\infty}^{0} y'(t)e^{-zt}dt = \langle y'(t)|e^{-zt}\rangle\Big|_{-\infty}^{0} = z\mathcal{L}(y(t)H(-t)) = zF(z), \quad \mathtt{Re}(z) < 0 \;■$$

---

2. Tenemos que causal a la derecha del cero = anticausal. Tenemos el PVI:

$$\begin{cases} xy''(x) + (1+2x)y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación por $H(-x)$ tomando en consideración que:

$$\begin{cases} u(x) = y(x)H(-x) \\ u'_{\text{gen}}(x) = y'(x)H(-x) - \delta(x) \\ u''_{\text{gen}}(x) = y''(x)H(-x) + 2\delta(x) - \delta'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} y(x)H(-x) = u(x), \quad \text{(i)} \\ y'(x)H(-x) = u'_{\text{gen}}(x) + \delta(x), \quad \text{(ii)} \\ y''(x)H(-x) = u''_{\text{gen}}(x) - 2\delta(x) + \delta'(x), \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

Así, manipulamos la ecuación diferencial a resolver multiplicando primero por $H(-x)$ y sustituyendo posteriormente las expresiones (i), (ii) y (iii).

$$xy''(x) + (1+2x)y'(x) + 2y(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$xy''(x)H(-x) + (1+2x)y'(x)H(-x) + 2y(x)H(-x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$xy''(x)H(-x) + y'(x)H(-x) + 2xy'(x)H(-x) + 2y(x)H(-x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$xu''_{\text{gen}}(x) - \cancel{2x\delta(x)} + x\delta'(x) + u'_{\text{gen}}(x) + \delta(x) + 2xu'_{\text{gen}}(x) + \cancel{2x\delta(x)} + 2u_{\text{gen}}(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$xu''_{\text{gen}}(x) + 2xu'_{\text{gen}}(x) + u'_{\text{gen}}(x) + 2u_{\text{gen}}(x) + x\delta'(x) + \delta(x) = 0$$

Aplicamos Laplace:

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d}{dz}(z^2U(z)) - 2\frac{d}{dz}(zU(z)) + zU(z) + 2U(z) - \cancel{\frac{d}{dz}(z) + 1} \\ 0 =& -(2zU(z) + z^2U'(z)) - 2(\cancel{U(z)} + zU'(z)) + zU(z) + \cancel{2U(z)} \\ 0 =& -2zU(z) - z^2U'(z) - zU'(z) \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}
-2zU(z) - z^2U'(z) - zU'(z) = 0 &\implies U'(z)(z^{\cancel{2}} + 2\cancel{z}) = -\cancel{z}U(z) \\
&\implies U'(z) = \frac{-U(z)}{z+2} \implies \frac{dU}{U} = -\frac{dz}{z+2} \\
&\implies \int \frac{dU}{U} = -\int \frac{dz}{z+2} \implies \mathrm{Ln}(U) = -\mathrm{Ln}(z+2) + C \\
-2zU(z) - z^2U'(z) - zU'(z) = 0 &\implies U(z) = \frac{C}{z+2}
\end{aligned}$$

Calculamos $\mathcal{L}(e^{-2x}\ H(-x))$

$$\mathcal{L}(e^{-2x}H(-x)) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(z+2)x}dx = -\frac{1}{z+2}, \quad \mathtt{Re}(z) < -2$$

Deducimos entonces que $u(x) = -Ce^{-2x}H(-x)$. Luego, evaluamos la condición inicial y obtenemos rápidamente que $C = -1$. Así, la solución buscada es:

$$u(x) = e^{-2x}H(-x), \quad \mathtt{Re}(z) < -2 \ \blacksquare$$

---

3. Respondemos el inciso a): Derivamos la función generalizada $y_o(x)$.

$$\underbrace{y_o(x) = A\delta(x) + B\delta'(x)}_{\text{(i)}} \implies \underbrace{y_o'(x) = A\delta'(x) + B\delta''(x)}_{\text{(ii)}}$$

Sustituimos (i) y (ii) en la ecuación a resolver, $y(x) - x\delta''(x) + xy'(x) = 0$.

$$\begin{gathered}
y_o(x) - x\delta''(x) + xy_o'(x) = 0 \\
\Downarrow \\
A\delta(x) + B\delta'(x) - x\delta''(x) + Ax\delta'(x) + Bx\delta''(x) = 0
\end{gathered}$$

Tomamos una función de prueba $\phi(x)$ para estudiar la relación obtenida anteriormente.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle A\delta(x) \mid \phi(x)\rangle + \langle B\delta'(x) \mid \phi(x)\rangle - \langle x\delta''(x) \mid \phi(x)\rangle + \langle xA\delta'(x) \mid \phi(x)\rangle + \langle Bx\delta''(x) \mid \phi(x)\rangle \\
&= A\phi(0) - B\phi'(0) + \langle \delta'(x) \mid (x\phi(x))'\rangle - \langle \delta(x) \mid (Ax\phi(x))'\rangle - \langle \delta'(x) \mid (Bx\phi(x))'\rangle \\
&= \cancel{A\phi(0)} - B\phi'(0) + \langle \delta'(x) \mid \phi(x) + x\phi'(x)\rangle - \cancel{A\phi(0)} - \cancel{(0)A\phi'(0)} - \langle \delta'(x) \mid B\phi(x) + Bx\phi'(x)\rangle \\
&= -B\phi'(0) - \langle \delta(x) \mid \phi'(x)\rangle - \langle \delta(x) \mid (x\phi'(x))'\rangle + \langle \delta(x) \mid B\phi'(x)\rangle + \langle \delta(x) \mid (Bx\phi'(x))'\rangle \\
&= -\cancel{B\phi'(0)} - \phi'(0) - \phi'(0) - \cancel{(0)\phi''(0)} + \cancel{B\phi'(0)} + B\phi'(0) + \cancel{(0)B\phi''(0)} \\
0 &= B\phi'(0) - 2\phi'(0) \implies B\phi'(0) = 2\phi'(0) \implies B = 2
\end{aligned}$$

Deducimos entonces que $B = 2$ y el valor de A es arbitrario pues el estudio realizado no arroja restricción alguna respecto a esta constante $\blacksquare$.

Respondemos el inciso b): De Laplace obtenenos que $F(z) = 2z + k$ y, por otro lado, $y(x) = 2\delta'(x) + k$. Concluimos entonces que no existe función clásica alguna que tenga transformada de Laplace $\blacksquare$.

---

4. Tenemos:

$$xy'(x) + 2\int_0^x y(t)\,\mathrm{sen}\,(x-t)dt = 0, \quad x > 0$$

Multiplicamos la ecuación por $H(x)$:

$$xy'(x)H(x) + 2H(x)\int_0^x y(t)\,\mathrm{sen}\,(x-t)dt = 0 \quad \text{(i)}$$

Recordando la igualdad de convolución con el Heaviside, obetenemos que

$$H(x)\int_0^x y(t)\,\mathrm{sen}\,(x-t)dt = y(t)H(t) * \mathrm{sen}(t)H(t) \quad \text{(ii)}$$

Planteamos:

$$u_{\text{gen}}(x) = y(x)H(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} u'_{\text{gen}}(x) = y'(x)H(x) + \delta(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$y'(x)H(x) = u'_{\text{gen}} - \delta(x) \quad \text{(iii)}$$

Sustituimos (ii) y (iii) en (i):

$$xu'_{\text{gen}} - x\delta(x) + 2[u_{\text{gen}}(t) * \mathrm{sen}(t)H(t)]$$

Aplicamos la transformada de Laplace:

$$-\frac{d}{dz}(zU(z)) + \frac{d}{dz}(1) + \frac{2U(z)}{z^2+1} = -U(z) - zU'(z) + \frac{2U(z)}{z^2+1}$$
$$\Downarrow$$
$$zU'(z) = U(z)\left(\frac{2}{z^2+1} - 1\right) = U(z)\left(\frac{1-z^2}{z^2+1}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{dU}{U} = \int \frac{1-z^2}{z(z^2+1)}dz = \int \frac{dz}{z(z^2+1)} - \int \frac{zdz}{z^2+1}$$

Procedemos a resolver $\displaystyle\int \frac{dz}{z(z^2+1)}$:

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+1}, \quad \text{para algún } (A,B,C) \in \mathbb{R}^3$$
$$\Downarrow$$
$$Az^2 + A + Bz^2 + Cz = (A+B)z^2 + Cz + A = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Calculamos la solución del sistema de ecuaciones $(A,B,C) = (1,-1,0)$. Proseguimos con la resolución de la ecuación dada:

$$\int \frac{dU}{U} = \int \frac{dz}{z(z^2+1)} - \int \frac{zdz}{z^2+1} = \int \frac{dz}{z} - 2\int \frac{zdz}{z^2+1}$$

Sea:

$$v = z^2 + 1$$
$$dv = 2z dz$$

Finalmente:

$$Ln(U) = Ln(z) - Ln(z^2+1) + k$$
$$\Downarrow$$
$$Ln(U) = Ln\left(\frac{kz}{z^2+1}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$U(z) = \frac{kz}{z^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(x) = k\cos(x)H(x)$$

Partimos de la condición inicial de $y(0) = 1$ para deducir que $k = 1$ y obtenemos que la solución de la ecuación viene dada por:

$$y(x) = \cos(x)H(x) \blacksquare$$

Aclaraciones:

* Esta mal decir:
  - $H(x)[\operatorname{sen}(x) * y(x)] = H(x)\int\limits_0^x y(t)\operatorname{sen}(x-t)dt$
  - $\int\limits_0^x y(t)\operatorname{sen}(x-t)dt = y(t)H(t) * \operatorname{sen}(t)H(t)$
  - $H(x)\int\limits_0^x y(t)\operatorname{sen}(x-t)dt = y(t) * \operatorname{sen}(t)$
* También esta mal saltarse el dominio de integración cuando son anticausales o escribirlo de forma incorrecta, ejemplo: $\forall z < 0$
* Lo primero estaría mal porque esta es la igualdad correcta: $(F * G)(t) = H(t-a-b)\int\limits_b^{t-a} f(t-s)g(s)ds$
* Lo segundo estaría mal porque no se puede tomar desigualdades con números complejos, por eso se debe especificar que se toma la parte real destinada al eje x.

Este parcial fue digitalizado co por Yesireth Guerrero, Carlo Herrera y Asxel Ramírez para GECOUSB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com